$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(n)$$

البرهان: نعلم أن

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = (M_X(t))^n = \left[(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\right]^n = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

وهي الدالة المولدة لكاي مربع بدرجة حرية n إذاً إن مجموع متغير
ان العينة لمتغير عشوائي من توزيع كاي مربع
درجة واحدة سوف تتبع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية n.

نظرية المعاينة:

تعريف المجتمع الإحصائي: هو كل الأشياء او الأفراد التي تجرى عليها الدراسة وعادةً يوصف كل مجتمع احصائي يسمى باسم هذا التوزيع وإذا كان التوزيع توزيعاً منفصلاً ندعو المجتمع بمجتمع احصائي منفصل ووسطاء التوزيع هي وسطاء المجتمع الإحصائي وإن كان التوزيع المستمر عندئذ ندعو المجتمع الإحصائي بالمجتمع الإحصائي المستمر ووسطاء هذا المجتمع سوف تكون نفسها التوزيع الاحتمالي.

على سبيل المثال:

احتمالي

إذا كان لدينا مجتمع احصائي موصوف بالتوزيع البواسوني وسيطه λ عندئذ ندعو هذا المجتمع بالمجتمع الاحصائي البواسوني بحيث λ يمثل وسيط هذا المجتمع وكل ما ينطبق على التوزيع البواسوني ينطبق على المجتمع أيضاً

اذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي طبيعي وسيطه الأول μ

وعلى هذا المثال يوجد مجتمعات احصائية بعدد التوزيعات الاحتمالية التي مرت معنا

العينة العشوائية:

هي جزء من المجتمع الاحصائي نأخذ باستقلالية وبنفس الاحتمال وعادةً يرمز لملاحظات العينة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ وإذا كان حجم العينة n وكان حجم المجتمع N محدد عندئذ $n \le N$

ملاحظة:

إذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وهذا يعني لدينا متغير

عشوائي موصوف لمتغير عشوائي طبيعي ولنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n

$X_1, X_2, \dots, X_n$ هذا يعني ان متغيرات هذه العينة

ومن المعلوم ان الوسط الحسابي لمتغيرات العينة نرمز به $\bar{X}$ وسوف يكون

من الشكل $\bar{X} \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$E\bar{X} = EX = \mu$$ ①

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$ ②

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ ③ لان $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تمثل كمية معيارية لـ $\bar{X}$

④ من المعلوم ان $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2$$

$\chi^2(n)$ $\quad$ $\chi^2(1)$

مع ملاحظة ان التوقع لـ $E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \Leftarrow \frac{(n-1)}{\sigma^2} ES^2 = (n-1)$

$\Rightarrow ES^2 = \sigma^2$

$$V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} V(S^2) = 2(n-1) \rightarrow$$

$$V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

اي ان تباين S^2 (تباين العينة) هو عبارة عن ضعف تباين المجتمع مع عدد المتغيرات

مع ملاحظة اذا كانت n كبيرة بشكل كافي عندئذ $V(S^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$ ⑤

وبرهن على ذلك على الشكل $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ولدينا ايضاً $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

عندئذ حسب نص توزيع ستيودنت (اذا كان لدينا x طبيعي معياري وكان χ^2

عندئذ عرفنا توزيع ستيودنت بالشكل

$$T = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}} \sim t(n)$$

ومن الملاحظ هنا أن z طبيعي معياري و ... نمط كاي مربع بدرجة حرية n-1

ويوجد استقلال عندئذ

$$T = \frac{z}{\sqrt{\frac{w}{n-1}}} \sim t(n-1)$$

نعوض

$$T = \frac{\quad}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma(n-1)}}} \sim t(n-1)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

ملاحظة: إذا كان لدينا مجتمعاً إحصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي أخذنا منه عينة عشوائية حجمها n بحيث التوقع موجود والتباين موجود لهذا المجتمع عندئذ إذا كانت $n \geq 30$ فإن هذا المجتمع سوف يتقارن من التوزيع الطبيعي

ملاحظة (2): إذا كان لدينا مجتمعان إحصائيان طبيعيان مستقلان الأول $X \sim (m_1, \sigma_1^2)$ والثاني من نمط $Y \sim N(m_2, \sigma_2)$ ولنأخذ من المجتمع الإحصائي الأول عينة حجمها n بحيث الوسط الحسابي $\bar{x}$ ولنأخذ من المجتمع الإحصائي الثاني عينة حجمها m بحيث الوسط الحسابي $\bar{x}$

عندئذ

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{x} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

البرهان: لدينا $\bar{x} \sim N(m_1, \frac{\sigma_1^2}{m})$, $\bar{Y} \sim N(m_2, \frac{\sigma_2^2}{m})$ ومنه يكون

$$\bar{Y} - m_2 \sim (0, \frac{\sigma_2^2}{m} \quad)$$

$$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{m})$$

وبالتالي

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{X} - (\mu_1 - \mu_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

مبرهنة: إذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً طبيعياً الاول $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ والثاني من النمط $Y \sim N(\mu, \sigma_2)$ ونأخذ من الاول عينة عشوائية حجمها n حيث $\bar{X}$ وسطها الحسابي و s_1^2 تباينها و s_1 هو الانحراف المعياري ومن الثاني عينة عشوائية حجمها m وسطها الحسابي $\bar{Y}$ و تباينها s_2^2 و s_2 هو الانحراف المعياري عندئذ

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p^2 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

حيث

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}, \quad s_p = \sqrt{s_p^2}$$

مع الملاحظة أن

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

البرهان: من الملاحظة السابقة لدينا

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

ولدينا أيضاً

$$(n-1)s_1^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)s_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

وبالتالي

$$W = \frac{(n-1)s_1^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)s_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

عندئذ يمكن تطبيق نص ستودنت ومنه فإن

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2) \Rightarrow T = \frac{\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{\sigma^2(n+m-2)}}}$$

$$\sim t(n+m-2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{x}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

توزيع فيشر أو f

إذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً أول موصوف بالمتغير $X \sim \chi^2(n)$
وكان لدينا مجتمعاً احصائياً آخر من نمط $Y \sim \chi^2(n)$
بحيث يوجد استقلال عندئذ

$$f = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \sim F(n,m) \Rightarrow f = \frac{mX}{mY} \sim f(n,m)$$

نظرية التقدير:

نفرض لدينا مجتمع احصائياً موصوفاً بـ احتمالي وسيطه المجهول θ ولنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n عندئذ إذا علمت قيمة الوسيط θ فنتعرف على المجتمع الاحصائي أكثر وبالتالي سوف نتعرف على نوعين من التقديرات على أساس عينة عشوائية حجمها معلوم وليكن n النوع الأول هو التقدير النقطي والثاني التقدير إجمالي أو مجالات الثقة الوسيط

وسوف نبدأ بالتقدير النقطي يرمز عادة للمقدر للوسيط θ بـ $\hat{\theta}$ وهذا المقدر النقطي دائماً يكون تابع فقط لمتغير العينة العشوائية ولا يحوي معطاء والبعض يدعوه بالاحصاء

$$\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

وعلى سبيل المثال $\bar{X}$ يمثل مقدر أو احصاء

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

أيضاً احصاء

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \, , \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - S)^2$$

أيضاً احصاء

لا يكون $\frac{\bar{X}}{\theta}$, $S^2\theta$ يمثل احصاء

ومن أجل ايجاد المقدر النقطي للوسيط مجتمع إحصائي سوف نتبع طريقتين الطريقة الأولى طريقة العزوم والثانية في طريقة الإحتمالية العظمى سوف نبدأ بالطريقة الأولى

من اجل أن توجد المقدر النقطي لوسيط مجتمع أحصائي لا أساس عينة عشوائية مأخوذة منه سوف نتعرف على مفهومين هما عزم المجتمع الاحصائي من المرتبة r وعزم العينة من المرتبة r

لنفرض انه لدينا مجتمعاً احصائياً موصوفاً بتوزيع أحتمالي وأخذنا منه عينة عشوائية حجمها n عندئذ بالتعريف عزم المجتمع الأحصائي من المرتبة r والذي نرمز له بالرمز α_r

$$\alpha_r = EX^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x,\theta)\, dx$$

وفي الحالة الخاصة إذا كانت r=1 فنحصل على عزم المجتمع الاحصائي من المرتبة الأولى:

$$\alpha_1 = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

وهكذا يمكن ان نحصل على عزوم المجتمع من مراتب الخ أما عزم العينة العشوائية من المرتبة r والذي نرمز له بـ m_r ، r صحيح موجب ؛ $m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$

وفي الحالة الخاصة يكون:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$$

والآن نعود الى شرح طريقة العزوم بإيجاد المقدر النقطي لـ θ

لنفرض ان المجتمع الاحصائي يحوي وسيط واحد وليكن θ عندئذ من أجل أيجاد المقدر النقطي θ وليكن $\hat{\theta}$ نحتاج الى حل معادلة واحدة وهي

$$m_1 = \alpha_1 \Big|_{\theta = \hat{\theta}}$$

إما اذا كان المجتمع الاحصائي يحوي وسيطين θ_1, θ_2 عندئذ نحتاج الى حل

نجد معادلتين وهما $m_1 = \alpha_1 \big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1}$ = الثاني $m_2 = \alpha_2 \big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1, \theta_2 = \hat{\theta}_2}$

وفي الحالة التي يكون فيها لدينا k وسيط نحتاج الى حل k معادلة وسوف تكون دراستنا في ايجاد مقدر نقطي لحالة وسيط واحد وسيطين نفرض لدينا مجتمعاً احصائياً برنولياً وسيطه p ولنأخذ من هذا المجتمع عينة حجمها n ولنوجد المقدر النقطي للوسيط p بطريقة العزوم.

الحل:

بما ان المجتمع الاحصائي يحوي وسيط واحد هو p فنحتاج الى حل معادلة واحدة وهي $m_1 = \alpha_1 \big|_{p = \hat{p}}$

$\Rightarrow \bar{X} = m_1 = p \big|_{p=\hat{p}} \Rightarrow \hat{p} = \bar{X}$

اي ان المقدر النقطي للوسيط p في المجتمع الاحصائي البرنولي على اساس عينة عشوائية حجمها n هو الوسيط الحسابي لمتغيرات هذه العينة p